



TITLE:

無限次元Bargmann空間とwhite noise汎関数の空間(無限次元空間上の測度論、無限次元群の表現および関連した話題)

AUTHOR(S):

横井, 嘉孝

CITATION:

横井, 嘉孝. 無限次元Bargmann空間とwhite noise汎関数の空間(無限次元空間上の測度論、無限次元群の表現および関連した話題). 数理解析研究所講究録 1994, 887: 55-71

ISSUE DATE:

1994-10

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/84332>

RIGHT:

無限次元 Bargmann 空間と white noise 汎関数の空間

熊本大学教養部 横井 嘉孝 (Yoshitaka Yokoi)

1 記号および基礎空間

E_0 を、その内積が $(\cdot, \cdot)_0$ である無限次元の可分 Hilbert 空間とし、 E_0 上には自己共役作用素 D が稠密に定義されていて、 $D > 1$ かつ D^{-1} は Hilbert-Schmidt 的であるとする。さらに、 D^{-1} の固有値と固有ベクトルのなす固有系

$$\{(\lambda_j, \zeta_j); j = 0, 1, 2, \dots\} \quad (D^{-1}\zeta_j = \lambda_j\zeta_j, j = 0, 1, 2, \dots)$$

に関して、次のことが満たされているとする。

1. $\{\zeta_j; j = 0, 1, 2, \dots\}$ は E_0 の完全正規直交系である。
2. $1 > \lambda_j \geq \lambda_{j+1}$ ($j = 0, 1, 2, \dots$)

$p \geq 0$ に対して、 E_p で D^p の定義域を表すことにする。 E_p は、 $(\cdot, \cdot)_p \equiv (D^p \cdot, D^p \cdot)_0$ を内積とする Hilbert 空間になっている。明らかに、 $0 \leq p < q$ ならば $E_q \subset E_p$ である。全ての $p \geq 0$ に対して、 $\{\zeta_j; j = 0, 1, 2, \dots\} \subset E_p$ なので

$$E \equiv \bigcap_{p \geq 0} E_p$$

と置くと、 E は $E \neq \emptyset$ を満たし核型空間になっている。次に、 $p \geq 0$ に対して、 E_0 を内積 $(\cdot, \cdot)_{-p} \equiv (D^{-p} \cdot, D^{-p} \cdot)_0$ に関して完備化する。得られる Hilbert 空間を E_{-p} で表すことにする。 $0 \leq p < q$ ならば、 $E_0 \subset E_{-p} \subset E_{-q}$ と見なすことが出来る。各 E_{-p} は E_p の共役空間になっており、これらの和集合の空間

$$E^* \equiv \bigcup_{p \geq 0} E_{-p}$$

は、核型空間 E の位相的共役空間となる。空間 E^* に Hilbert 空間族 $\{E_{-p}; p \geq 0\}$ による帰納的極限位相を与えておく。なお、ここでは帰納的極限位相とは、各標準的単射 $\iota_{-p}: E_{-p} \rightarrow E^*$ が連続となる E^* の最強の凸位相のこととする。この位相の 0-近傍の基底の要素としては、

$$U = \text{a.c.e.} \left(\bigcup_{p \geq 0} \{x \in E_{-p}; \|x\|_{-p} < \gamma_p\} \right) \quad (\{\gamma_p; \gamma_p > 0, p \geq 0\})$$

の形のものをとれる。ここで、a.c.e. は absolutely convex envelope のことで、

$$\text{a.c.e.}(X) = \left\{ \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j; x_j \in X, \alpha_j \in \mathbf{R} (j = 1, 2, \dots, n), \sum_{j=1}^n |\alpha_j| \leq 1 \right\}$$

とする。

$x \in E^*$ の $\xi \in E$ に於ける値を $\langle x, \xi \rangle$ で表すと、これは $E^* \times E$ 上の連続的雙線形形式となる。

$$|\langle x, \xi \rangle| \leq \|x\|_{-p} \|\xi\|_p, \quad p \geq 0$$

また、 D^p ($p \in \mathbf{R}$) は E においてだけではなく、 E^* においても連続的に作用しており、次の関係を満たす。

$$\langle D^p x, \xi \rangle = \langle x, D^p \xi \rangle \text{ for any } x \in E^*, \text{ any } \xi \in E$$

$$D^p : E_q \xrightarrow[\text{isomorphism}]{\text{isometric}} E_{q-p} \quad (p, q \in \mathbf{R})$$

上記のようにして得られた Gel'fand の 3 つ組 $E \subset E_0 \subset E^*$ を (white noise calculus のための) 基礎空間と呼ぶことにする。

次に、 $p \in \mathbf{R}$ に対して、 $H_p \equiv E_p + \sqrt{-1}E_p$ と置き、 $z = x + \sqrt{-1}y$, $w = u + \sqrt{-1}v \in H_p$ に対して、

$$(z, w)_p \equiv (x, u)_p + (y, v)_p + \sqrt{-1}\{-(x, v)_p + (y, u)_p\}$$

と置く。 H_p は、 $(z, w)_p$ を内積とする \mathbf{C} 上の Hilbert 空間になる。 H_p を E_p の複素化と呼ぶことにする。 $p \geq 0$ の時、 $z = x + \sqrt{-1}y \in H_{-p}$ と $\zeta = \xi + \sqrt{-1}\eta \in H_p$ とに対して、次のように定義すれば、 H_{-p} は H_p 上の連続線形汎関数全体の空間になっていることが容易に判る。

$$\langle z, \zeta \rangle \equiv \langle x, \xi \rangle - \langle y, \eta \rangle + \sqrt{-1}(\langle x, \eta \rangle + \langle y, \xi \rangle)$$

明らかに、

$$|\langle z, \zeta \rangle| \leq \|z\|_{-p} \|\zeta\|_p$$

が成立する。前と同じように、

$$H \equiv \bigcap_{p \geq 0} H_p, \quad H^* \equiv \bigcup_{p \geq 0} H_{-p}$$

と置く。 H に $\{H_p; p \geq 0\}$ の射影極限位相を考えると、 H^* は核型空間 H の位相的共役空間を実現している。また、 H^* には $\{H_{-p}; p \geq 0\}$ の帰納的極限位相を入れておく。a.c.e.などを考える時の係数体は \mathbf{C} である。

三つ組 $H \subset H_0 \subset H^*$ を無限次元 Bargmann 空間の基礎空間と呼ぶことにする。

$z = x + \sqrt{-1}y$ ($x, y \in E^*$) に対して、

$$D^p z = D^p x + \sqrt{-1} D^p y \text{ for } z = x + \sqrt{-1}y, \quad x, y \in E^*$$

と置いて D^p を H^* 上へ拡張する。 D^p の H^* での作用は複素化以前と同様に H のみならず H^* 上で連続的であり、

$$\langle D^p z, \zeta \rangle = \langle z, D^p \zeta \rangle \text{ for any } z \in H^*, \text{ any } \zeta \in H$$

$$D^p : H_q \xrightarrow[\text{isomorphism}]{\text{isometric}} H_{q-p} \quad (p, q \in \mathbf{R})$$

が成立する。

後で使う記号・定数等を示しておく。

$$t_0 = -\frac{\log 2}{2 \log \lambda_0}, \text{ i.e., } \lambda_0^{2t_0} = 1/2,$$

$$s_0 = \inf \left\{ s; \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j^{2s} < \infty \right\},$$

$$p_0 = \max(t_0, s_0)$$

$$\mathcal{P}(E^*) = \{ \text{finite sums of } c \prod_j \langle x, \xi_j \rangle; \xi_j \in E, c \in \mathbf{C} \}$$

$$\mathcal{P}(H^*) = \{ \text{finite sums of } c \prod_j \langle z, \xi_j \rangle; \xi_j \in H, c \in \mathbf{C} \}$$

X を \mathbf{C} または \mathbf{R} 上の核型空間、Hilbert 空間またはそれらの位相的雙対空間とする。

$X^{\widehat{\otimes} n}$: X の n 重対称テンソル積

$x_1, \dots, x_n \in X$ に対して、

$$\widehat{\otimes}_{j=1}^n x_j : x_1 \otimes \dots \otimes x_n \text{ の対称化,}$$

$$\mathcal{N} = \{ \text{all sequences of nonnegative integers} \},$$

$\mathcal{N}_0 = \{\vec{n} = (n_0, n_1, n_2, \dots); \vec{n} \in \mathcal{N}, n_j = 0 \text{ for almost all } j\}$,
 $\vec{n}, \vec{k} \in \mathcal{N}_0$ に対して、

$$\vec{n} \geq \vec{k} \iff n_j \geq k_j \text{ for all } j,$$

$$\vec{n} \wedge \vec{k} = (n_0 \wedge k_0, n_1 \wedge k_1, n_2 \wedge k_2, \dots),$$

$$\vec{n}! = \prod_j n_j!, \quad \binom{\vec{n}}{\vec{k}} = \prod_j \binom{n_j}{k_j}$$

$$|\vec{n}| = n_0 + n_1 + n_2 + \dots, \quad p\vec{n} = (pn_0, pn_1, pn_2, \dots) \quad (p \in \mathbf{R})$$

とする。さらに、 D^{-1} の固有系 $\{(\lambda_j, \zeta_j)\}_{j=0}^\infty$ に対して、

$$\lambda^{p\vec{n}} = \prod_j \lambda_j^{pn_j},$$

$$\zeta^{\widehat{\otimes} \vec{n}} = \widehat{\otimes}_{n_j \neq 0} \zeta_j^{\widehat{\otimes} n_j} = \text{the symmetrization of } \otimes_{n_j \neq 0} \zeta_j^{\otimes n_j},$$

$$Z^{\vec{n}} = Z^{\vec{n}}(z) = (2^n \vec{n}!)^{-1/2} \prod_j \langle z, \zeta_j \rangle^{n_j} = (2^n \vec{n}!)^{-1/2} \langle z^{\widehat{\otimes} \vec{n}}, \zeta^{\widehat{\otimes} \vec{n}} \rangle, \quad z \in H^*,$$

$$h_{\vec{n}} = h_{\vec{n}}(x) = (2^n \vec{n}!)^{-1/2} \prod_j H_{n_j} \left(\frac{\langle x, \zeta_j \rangle}{\sqrt{2}} \right), \quad x \in E^*,$$

ここで、 $H_n(u)$ は、 n 次の Hermite 多項式

$$H_n(u) = (-1)^n \exp[u^2] \left(\frac{d}{du} \right)^n \exp[-u^2]$$

である。

2 white noise 汎関数の空間 (L^2)、無限次元 Bargmann 空間 (\mathcal{F}_0) 及び Gauss 変換 G

Minlos の定理によれば、基礎空間 $E \subset E_0 \subset E^*$ において、次のことが成立する。 E 上の正定値連続汎関数

$$C(\xi) = \exp\left[-\frac{1}{2}\|\xi\|_0^2\right]$$

に対して、 $C(\xi)$ をその特性汎関数とする E^* 上の確率測度 μ が一意的に存在する。

$$C(\xi) = \int_{E^*} \exp[\sqrt{-1}\langle x, \xi \rangle] d\mu(x), \quad \xi \in E$$

ここに、 $\langle x, \xi \rangle$ は $x \in E^*$ と $\xi \in E$ によって与えられる標準的双線形形式である。 \mathcal{B} を E^* 上のシリンダー集合 (但し、その base が有限次元 Borel 集合となっているもの) 全てで生成される σ -集合体とする。

$$(L^2) \equiv L^2(E^*, \mathcal{B}, \mu)$$

と置く。 (L^2) はホワイトノイズ汎関数の空間と呼ばれている (Hida[H])。明らかに、 $\mathcal{P}(E^*)$ は、 (L^2) において稠密である。

さて、 H^* を $E^* \times E^*$ と同一視して、 H^* に直積測度 $\nu \equiv \mu \times \mu$ を導入して置く。

$$(\mathcal{F}_0) \equiv \overline{\mathcal{P}(H^*)}^{L^2(\nu)} = \mathcal{P}(H^*) \text{ の } L^2(\nu) \text{ - 閉包}$$

を無限次元 Bargmann 空間と云うことにする。空間 (\mathcal{F}_0) は、 $\bar{z} \in H^*$ の関数を含まないで、 $L^2(H^*, \nu)$ の真の部分空間である。

(L^2) の稠密な部分空間 $\mathcal{P}(E^*)$ から (\mathcal{F}_0) の稠密な部分空間 $\mathcal{P}(H^*)$ 上への同型かつ等距離的写像 G を定義しよう。 $\varphi \in \mathcal{P}(E^*)$ に対して、 $\varphi(x)$ は E^* 上の関数であるが、 $\langle x, \xi \rangle$, $(x \in E^*, \xi \in E)$ などと置き換えることによって、 H^* 上へ自然に拡張され、 $\mathcal{P}(H^*)$ の元となる。従って、 $w \in H^*$ に対して、

$$G\varphi(w) \equiv \int_{E^*} \varphi(x + w/\sqrt{2}) d\mu(x)$$

と置くと、 $G\varphi \in \mathcal{P}(H^*)$ となる。さらに、 $f \in \mathcal{P}(H^*)$ に対して、

$$\tilde{G}f(x) \equiv \int_{E^*} f(\sqrt{2}(x + \sqrt{-1}y)) d\mu(y) \quad (x, y \in E^*)$$

と置くと、

$$\tilde{G}f \in \mathcal{P}(E^*) \text{ かつ } G\tilde{G}f = f$$

が成立している。特に、 (L^2) の CONS $\{h_{\vec{n}}; \vec{n} \in \mathcal{N}_0\}$ と (\mathcal{F}_0) の CONS $\{Z^{\vec{n}}; \vec{n} \in \mathcal{N}_0\}$ に対して、

$$Gh_{\vec{n}} = Z^{\vec{n}}, \quad \tilde{G}Z^{\vec{n}} = h_{\vec{n}}$$

が成立する。従って、 G は、 $(\mathcal{P}(E^*), \|\cdot\|_{L^2(\mu)})$ から $(\mathcal{P}(H^*), \|\cdot\|_{L^2(\mu \times \mu)})$ への等距離写像であり、 \tilde{G} は G の逆写像である。即ち、

$$G^{-1} = \tilde{G} \quad .$$

明らかに、 G 及び G^{-1} は (L^2) と (\mathcal{F}_0) の間の等距離的同型対応へと一意的に拡張される。 G を Gauss 変換、 G^{-1} を逆 Gauss 変換ということにする。

3 作用素 $\Lambda(D^p)$ による Bargmann 空間の 3 つ組 $(\mathcal{F}) \subset (\mathcal{F}_0) \subset (\mathcal{F}')$ の構成

第 1 節で与えた作用素 D_p ($p \in \mathbf{R}$) について、

$$D^p: H_q \rightarrow H_{q-p} \text{ (isometric isomorphism)}$$

$$D^p: H_q \rightarrow H^* \text{ (continuous injection)}$$

$$D^p: H \rightarrow H^* \text{ (continuous injection)}$$

が成立していることより、 $\mathcal{P}(H^*)$ 上の作用素 $\Lambda(D^p)$ を各 $p \in \mathbf{R}$ に対して、次のように定義することが出来る。

$$\Lambda(D^p)f(z) \equiv f(D^p z), \quad f \in \mathcal{P}(H^*)$$

$f(z) = \prod_{j=1}^n \langle z, \xi_j \rangle \in \mathcal{P}(H^*)$ とすると、

$$\Lambda(D^p)f(z) = \prod_{j=1}^n \langle D^p z, \xi_j \rangle = \prod_{j=1}^n \langle z, D^p \xi_j \rangle$$

であるから、次の等式が直ちに出来る。

$$\Lambda(D^p)Z^{\vec{n}}(z) = \left(\prod_j \lambda_j^{-p n_j} \right) Z^{\vec{n}}(z) = \lambda^{-p \vec{n}} Z^{\vec{n}}(z)$$

容易に分かるように、 $\mathcal{P}(H^*)$ は、次の量を内積とする pre-Hilbert 空間である。

$$(\Lambda(D^p)f, \Lambda(D^p)g)_{(\mathcal{F}_0)} = \int_{H^*} (\Lambda(D^p)f(z)) \overline{\Lambda(D^p)g(z)} d\nu(z)$$

これによって完備化した Hilbert 空間とその内積を $((\mathcal{F}_p), (\cdot, \cdot)_{(\mathcal{F}_p)})$ で表すことにする。 D^p の時と同様に、任意の $q \in \mathbf{R}$ に対して、 $\Lambda(D^p)$ は (\mathcal{F}_q) から (\mathcal{F}_{q-p}) の上への等距離同型となる。

Proposition 3.1 任意の $p \in \mathbf{R}$ に対して、 $\{\lambda^{p \vec{n}} Z^{\vec{n}}; \vec{n} \in \mathcal{N}_0\}$ は (\mathcal{F}_p) の CONS である。それ故、任意の $f \in (\mathcal{F}_p)$ は、

$$\|f\|_{(\mathcal{F}_p)}^2 = \sum_{\vec{n} \in \mathcal{N}_0} \lambda^{-2p \vec{n}} |c_{\vec{n}}|^2 < \infty \text{ となる } \{c_{\vec{n}}; \vec{n} \in \mathcal{N}_0\} \text{ に対して、}$$

$$f = \sum_{\vec{n} \in \mathcal{N}_0} c_{\vec{n}} Z^{\vec{n}}$$

と展開される。更に、この f は $\Lambda(D^q)$ ($q \in \mathbf{R}$) に対して、

$$\Lambda(D^q)f = \sum_{\vec{n} \in \mathcal{N}_0} \lambda^{-q \vec{n}} c_{\vec{n}} Z^{\vec{n}} \in (\mathcal{F}_{p-q}) \quad (q \in \mathbf{R})$$

を満たす。

この Proposition より、 (\mathcal{F}_{-p}) を (\mathcal{F}_p) の双対空間と同一視することが出来て、 $0 < p < q$ のとき包含関係

$$(\mathcal{F}_q) \subset (\mathcal{F}_p) \subset (\mathcal{F}_0) \subset (\mathcal{F}_{-p}) \subset (\mathcal{F}_{-q})$$

が成立する。実際、 $F \in (\mathcal{F}_{-p})$ と $f \in (\mathcal{F}_p)$ に対する bilinear form $\langle F, f \rangle$ は、

$$\langle F, f \rangle = \int_{H^*} (\Lambda(D^{-p})F(z)) \Lambda(D^p)f(z) d\nu(z)$$

で実現される。また、 D^{-1} が Hilbert-Schmidt 的であることから、 $p \in \mathbf{R}$ と $s > s_0$ とに対して、

$$\sum_{\vec{n} \in \mathcal{N}_0} \|\lambda^{(p+s)\vec{n}} Z^{\vec{n}}\|_{(\mathcal{F}_p)}^2 = \prod_j (1 - \lambda_j^{2s})^{-1} < \infty$$

となっている。このことは、 (\mathcal{F}_{p+s}) から (\mathcal{F}_p) への標準的単射が Hilbert-Schmidt 的であることを意味している。従って、

$$(\mathcal{F}) = \bigcap_{p=0}^{\infty} (\mathcal{F}_p), \quad (\mathcal{F}') = \bigcup_{p=0}^{\infty} (\mathcal{F}_{-p})$$

とおくと、 (\mathcal{F}) は核型空間であり (\mathcal{F}') はその双対空間である。即ち、3つ組

$$(\mathcal{F}) \subset (\mathcal{F}_0) \subset (\mathcal{F}')$$

は、Gel'fand triplet である。この 3つ組を無限次元 Bargmann 空間の Gel'fand triplet 呼ぶことにする。(Bargmann 空間の呼び名は [B-K] に倣った。)

この 3つ組の 1 性質として、この 3つ組は "holomorphic functions" の 3つ組と等距離同型になるということを挙げる事が出来る。このことは、異なった設定の仕方で [B-K] や [Ko] において述べられているが、我々の枠組では次のようになる。

Proposition 3.2 任意の $p \in \mathbf{R}$ と任意の $f \in (\mathcal{F}_p)$ に対して、 $f = \sum_{\vec{n} \in \mathcal{N}_0} c_{\vec{n}} Z^{\vec{n}}$ と展開するとき、級数

$$\tilde{f}(z) = \sum_{\vec{n} \in \mathcal{N}_0} c_{\vec{n}} Z^{\vec{n}}(z)$$

は H_{-p} の任意の有界集合上において、一様に絶対収束する。極限関数 $\tilde{f}(z)$ は、各点 $z \in H_{-p}$ において不等式

$$|\tilde{f}(z)| \leq \exp\left[\frac{1}{4}\|z\|_{-p}^2\right] \|f\|_{(\mathcal{F}_p)}$$

を満たす。更に、 $\tilde{f}(z)$ は、 H_{-p} において連続であり、[H-P](E. Hille & R. S. Phillips) の意味において analytic である。

Proof. Schwarz の不等式と $Z^{\vec{n}}(z)$ の形より、任意の $z \in H_{-p}$ に対して

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\vec{n} \in \mathcal{N}_0} |c_{\vec{n}} Z^{\vec{n}}(z)| \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\vec{n}|=n} |c_{\vec{n}} Z^{\vec{n}}(z)| \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\vec{n}|=n} |c_{\vec{n}} \langle z^{\otimes n}, (2^n \vec{n}!)^{-1/2} \zeta^{\otimes n} \rangle| \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (2^n \vec{n}!)^{-1/2} \sum_{|\vec{n}|=n} |c_{\vec{n}}| \lambda^{-p\vec{n}} \left(\frac{n!}{\vec{n}!} \right)^{1/2} |\langle z^{\otimes n}, \lambda^{p\vec{n}} \zeta^{\otimes n} \rangle| \\
 &\leq \|f\|_{(\mathcal{F}_p)} \exp\left[\frac{1}{4} \|z\|_{-p}^2\right]
 \end{aligned}$$

を得る。従って、求める評価式が成立する。この評価式より、級数 $\tilde{f}(z)$ は H_{-p} の任意の有界集合上において一様に絶対収束し、 z の連続関数となることが分かる。また、 $\tilde{f}(z)$ の任意有限和は、[H-P] の意味において、 H_{-p} 上 analytic で局所一様有界であるから、[H-P] の Theorem 3. 18. 1 を適用して $\tilde{f}(z)$ の analyticity を導くことが出来る。(証終)

この命題は、任意の $p \in \mathbf{R}$ 毎に、 $f \in (\mathcal{F}_p)$ と H_{-p} 上の analytic な関数 $\tilde{f}(z)$ で、その order が高々 2、type が高々 $1/4$ のものとが対応していることを示している。しかし、 $p \leq s_0$ に対しては、 $\tilde{f}(z)$ は f の ν -a.e. 等しいという意味での version ではあり得ない。何故なら、 $p \leq s_0$ なら、 $\nu(H_{-p}) = 0$ となっているからである。今後、 $L^2(\nu)$ に属する要素 f の version と言えは f と ν -a.e. 等しいもののこととする。 $p > s_0$ なら、次の命題が成立する。

Proposition 3.3 $p > s_0$ とする。 $f \in (\mathcal{F}_p)$ に対して、 $\tilde{f}(z)$ は H_{-p} の関数としては一意的な連続 version である。さらに、 $p > q + s_0$ なら $\tilde{f}(D^q z)$ は $\Lambda(D^q)f$ の H_{-p+q} における連続 version となっている。

Proof. $p > s_0$ 、 $f = \sum_{\vec{n} \in \mathcal{N}_0} c_{\vec{n}} Z^{\vec{n}}$ とする。 $\nu(H_{-p}) = 1$ であるから、 f と \tilde{f} とは H^* において ν -a.e. 等しい。また、 H_{-p} においては、空でない開集合の ν -測度は 0 でないから H_{-p} 上の連続 version は一意的である。 $p > q + s_0$ なら $z \in H_{-p+q}$ に対して $D^q z \in H_{-p}$ である。故に、

$$\tilde{f}(D^q z) = \sum_{\vec{n} \in \mathcal{N}_0} c_{\vec{n}} Z^{\vec{n}}(D^q z) = \sum_{\vec{n} \in \mathcal{N}_0} \lambda^{-q\vec{n}} c_{\vec{n}} Z^{\vec{n}}(z)$$

は H_{-p+q} の任意の有界集合上一様に絶対収束する。これは最後の部分の主張である。(証終)

(\mathcal{F}) の要素 f に対応する analytic な version \tilde{f} は、それを H_{-p} ($p > s_0$) に制限すれば、minimal type の analytic な関数と言える。即ち、次の系が成立する。

Corollary 3.1 $f \in (\mathcal{F})$ ならば、任意の $p \in \mathbf{R}$ 、任意の $k > 0$ と任意の $z \in H_{-p}$ に対して

$$|\tilde{f}(z)| \leq \|f\|_{(\mathcal{F}_{p+k})} \exp\left[\frac{1}{4}\lambda_0^{2k} \|z\|_{-p}^2\right]$$

成立する。

Proof. $z \in H_{-p}$ とすると命題 3.1 の $\tilde{f}(z)$ に対する評価式と次の不等式より明らかである。

$$\|z\|_{-(p+k)}^2 \leq \lambda_0^{2k} \|z\|_{-p}^2 \quad (\text{証終})$$

Theorem 3.1 $f \in (\mathcal{F})$ に対して、 H^* において定義した H^* の帰納的極限位相に関して連続な version $\tilde{f}(z)$ が一意的に存在する。

Proof. $f \in (\mathcal{F})$ なら、任意の $p \in \mathbf{R}$ に対して、 $f \in (\mathcal{F}_p)$ である。故に、各 $p > s_0$ 毎に H_{-p} 上の連続 version $\tilde{f}_p(z)$ が存在する。 $s_0 < p < q$ なら H_{-q} の位相より H_{-p} の位相の方が強いので $\tilde{f}_q(z)$ の H_{-p} への制限は H_{-p} において連続である。 H_{-p} 上の連続 version の一意性より $\tilde{f}_q(z)$ の H_{-p} への制限は $\tilde{f}_p(z)$ と一致している。従って、 H^* 上の関数 $\tilde{f}(z)$ が存在し、それは全ての $p > s_0$ に対して $\tilde{f}_p(z)$ の拡張となっている。

この $\tilde{f}(z)$ に対する H^* での連続性を示せばよい。 $z \in H^*$ を任意に固定したとき、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、 H^* の帰納的極限位相に関する 0-近傍 U を見つけて $w \in U$ なる限り、

$$|\tilde{f}(z+w) - \tilde{f}(z)| \leq \varepsilon$$

とできることを示せばよい。

$z \in H^*$ であるから、ある $q \geq 0$ に対して $z \in H_{-q}$ となっている。この時、 $p \geq 0$ に対して、

$$\delta_p = \left(2 \left(\exp\left[\frac{1}{4}(1 + \|z\|_{-p})^2\right] \|f\|_{(\mathcal{F}_p)} \sqrt{(1 + \|z\|_{-p})^2 + 2}\right)^{-1} \cdot \varepsilon\right) \wedge 1$$

と置き、 $p \geq q$ なら $\gamma_p = \delta_p$ 、 $p \leq q$ なら $\gamma_p = \delta_q$ のように与える。そこで、

$$U = \text{a.c.e.} \left(\bigcup_{p \geq 0} \{w; w \in H_{-p}, \|w\|_{-p} < \gamma_p\} \right)$$

と定義すれば、この U が求める近傍となる。 U は、

$$\gamma_p \leq 1 \quad (p \geq q), \quad \gamma_p = \gamma_q \quad (p \leq q)$$

を満たしている。

$$\tilde{f}(z) = \sum_{\vec{n} \in \mathcal{N}_0} c_{\vec{n}} Z^{\vec{n}}(z) \quad \text{with} \quad \sum_{\vec{n} \in \mathcal{N}_0} \lambda^{-2p\vec{n}} |c_{\vec{n}}|^2 < \infty \quad \text{for any } p \geq 0$$

として、 $|\tilde{f}(z+w) - \tilde{f}(z)|$ の評価をしてみよう。まず、 $\tilde{f}(z)$ が、

$$\begin{aligned} \tilde{f}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \langle z^{\hat{\otimes} n}, F_n \rangle, \quad \text{但し、} \quad F_n \in H^{\hat{\otimes} n} \quad (n = 0, 1, \dots), \\ \|f\|_{(\mathcal{F}_p)}^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} n! \|F_n\|_{H^{\hat{\otimes} n}}^2 \quad (p \geq 0) \end{aligned}$$

と表せることに注意すると、

$$|\tilde{f}(z+w) - \tilde{f}(z)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |\langle (z+w)^{\hat{\otimes} n} - z^{\hat{\otimes} n}, F_n \rangle|$$

となる。ここで、 $w \in U$ は、

$$\begin{aligned} w &= \sum_{j=1}^N \alpha_j w_{p_j}, \quad w_{p_j} \in H_{p_j}, \quad \|w_{p_j}\|_{-p_j} < \gamma_{p_j}, \quad q \leq p_j \quad (1 \leq j \leq N), \\ &\sum_{j=1}^N |\alpha_j| \leq 1 \end{aligned}$$

となっているとしてよいから、

$$|\langle (z+w)^{\hat{\otimes} n} - z^{\hat{\otimes} n}, F_n \rangle| \leq n \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l} \frac{1}{l+1} |\langle z^{\hat{\otimes}(n-l)} \hat{\otimes} w^{\hat{\otimes}(l+1)}, F_n \rangle|$$

に対して後述の補題を適用すれば、

$$\begin{aligned} |\tilde{f}(z+w) - \tilde{f}(z)| &\leq \sum_{j=1}^N |\alpha_j| \|f\|_{(\mathcal{F}_{p_j})} \frac{1}{2} \sqrt{(1 + \|z\|_{-p_j})^2 + 2} \exp\left[\frac{1}{4}(1 + \|z\|_{-p_j})^2\right] \|z\|_{-p_j} \\ &\leq \sum_{j=1}^N |\alpha_j| \varepsilon \leq \varepsilon \end{aligned}$$

となる。(証終)

LEMMA 3. 1 $\alpha_j \in \mathbf{C}$, $z_j \in H_{-p_j}$ ($j = 1, 2, \dots, N$) に対して、
 $\sum_{j=1}^N |\alpha_j| \leq 1$, $w = \sum_{j=1}^N \alpha_j z_j$ とすると、

$$\begin{aligned} w^{\widehat{\otimes}(l+1)} &= \left(\sum_{j=1}^N \alpha_j z_j \right)^{\widehat{\otimes}(l+1)} \\ &= \sum_{l_1+\dots+l_N=l+1} \frac{l!}{l_1! \dots l_N!} \alpha_1^{l_1} \dots \alpha_N^{l_N} z_1^{\widehat{\otimes} l_1} \widehat{\otimes} \dots \widehat{\otimes} z_N^{\widehat{\otimes} l_N} \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{l_1+\dots+l_j=l+1, l_j \neq 0} \frac{l!}{l_1! \dots l_j!} \alpha_1^{l_1} \dots \alpha_j^{l_j} z_1^{\widehat{\otimes} l_1} \widehat{\otimes} \dots \widehat{\otimes} z_j^{\widehat{\otimes} l_j} \end{aligned}$$

が成立する。

Lemma 3. 2 $a_1, \dots, a_j \geq 0$ ならば、

$$\sum_{l_1+\dots+l_j=l+1, l_j \neq 0} \frac{(l+1)!}{l_1! \dots l_j!} a_1^{l_1} \dots a_j^{l_j} \leq (l+1)(a_1 + \dots + a_j)^l a_j$$

である。

補題の証明は省略する。

4 Bargmann 空間の 3 つ組 $(\mathcal{F}) \subset (\mathcal{F}_0) \subset (\mathcal{F}')$ から逆 Gauss 変換 G^{-1} によって white noise 空間の 3 つ組 $(\mathcal{S}) \subset (L^2) \subset (\mathcal{S}')$ を導くこと

ここでは、第 2 節で定義された Gauss 変換と逆 Gauss 変換を用いて、
 white noise 超汎関数の空間とテスト汎関数の空間とを構成する。先ず、
 G が $\mathcal{P}(E^*)$ から $\mathcal{P}(H^*)$ の上への等距離同型であること：

$$\left(\mathcal{P}(E^*), \|\cdot\|_{(L^2)} \right) \xrightarrow[\text{isometric}]{G} \left(\mathcal{P}(H^*), \|\cdot\|_{(\mathcal{F}_0)} \right)$$

に注意する。 $\mathcal{P}(E^*)$ から $\mathcal{P}(E^*)$ の上への線形作用素 $\Gamma(D^p)$ ($p \in \mathbf{R}$) を、

$$\Gamma(D^p)\varphi \equiv G^{-1}\Lambda(D^p)G\varphi$$

によって定義する。明らかに、 $\mathcal{P}(E^*)$ は次の量を内積とする pre-Hilbert
 空間である ($p \in \mathbf{R}$)。

$$(\Gamma(D^p)\varphi, \Gamma(D^p)\psi)_{(L^2)} = \int_{E^*} (\Gamma(D^p)\varphi(x)) \overline{\Gamma(D^p)\psi(x)} d\mu(x)$$

$\mathcal{P}(E^*)$ のこの内積による完備化 Hilbert 空間と、その内積を

$$((\mathcal{S}_p), (\varphi, \psi)_{(\mathcal{S}_p)}) \quad (p \in \mathbf{R})$$

で表す。 G 、 G^{-1} 、 $\Lambda(D^p)$ について、

$$\begin{aligned} Gh_{\vec{n}} &= Z^{\vec{n}}, \quad G^{-1}Z^{\vec{n}} = h_{\vec{n}}, \\ \Lambda(D^p)Z^{\vec{n}}(z) &= \left(\prod_j \lambda_j^{-pn_j} \right) Z^{\vec{n}}(z) = \lambda^{-p\vec{n}} Z^{\vec{n}}(z) \end{aligned}$$

の関係があることより、

$$\Gamma(D^p)h_{\vec{n}}(x) = \left(\prod_j \lambda_j^{-pn_j} \right) h_{\vec{n}}(x) = \lambda^{-p\vec{n}} h_{\vec{n}}(x)$$

が成立する。このことと $\{h_{\vec{n}}; \vec{n} \in \mathcal{N}_0\}$ が (L^2) の CONS であることから、次の命題を得る。

Proposition 4.1 任意の $p \in \mathbf{R}$ に対して $\{\lambda^{p\vec{n}} h_{\vec{n}}; \vec{n} \in \mathcal{N}_0\}$ は (\mathcal{S}_p) の CONS である。従って、任意の $\varphi \in (\mathcal{S}_p)$ は、

$$\varphi = \sum_{\vec{n} \in \mathcal{N}_0} c_{\vec{n}} h_{\vec{n}}, \quad \|\varphi\|_{(\mathcal{S}_p)}^2 = \sum_{\vec{n} \in \mathcal{N}_0} \lambda^{-2p\vec{n}} \|c_{\vec{n}}\|^2 < \infty$$

という展開を持つ。さらに、任意の $p, q \in \mathbf{R}$ に対して、 $\Gamma(D^q)$ は (\mathcal{S}_p) から (\mathcal{S}_{p-q}) の上への等距離作用素に拡張され、次の等式を満たす。上の形の $\varphi \in (\mathcal{S}_p)$ に対して、

$$\Gamma(D^q)\varphi = \sum_{\vec{n} \in \mathcal{N}_0} \lambda^{-q\vec{n}} c_{\vec{n}} h_{\vec{n}} \in (\mathcal{S}_{p-q}).$$

明らかに、 $(\mathcal{S}_0) = (L^2)$ である。

Corollary 4.1 $0 < p < q$ なら

$$(\mathcal{S}_q) \subset (\mathcal{S}_p) \subset (L^2) \subset (\mathcal{S}_{-p}) \subset (\mathcal{S}_{-q})$$

であり、任意の $p \in \mathbf{R}$ に対して、 (\mathcal{S}_{-p}) は (\mathcal{S}_p) の双対空間と見なされる。実際、 $\psi \in (\mathcal{S}_{-p})$ と $\varphi \in (\mathcal{S}_p)$ に対する標準的 bilinear form $\langle \psi, \varphi \rangle$ は、

$$\langle \psi, \varphi \rangle = \int_{E^*} \left(\Gamma(D^{-p})\psi(x) \right) \Gamma(D^p)\varphi(x) d\mu(x)$$

によって実現される。

Proposition 4.2 $p \in \mathbf{R}$, $s > s_0$ に対して、 (\mathcal{S}_{p+s}) から (\mathcal{S}_p) への標準的単射 $\iota_{p+s,p}$ は、Hilbert-Schmidt 的であり、その HS ノルム $\|\iota_{p+s,p}\|_{\text{HS}}$ は

$$\|\iota_{p+s,p}\|_{\text{HS}}^2 = \sum_{\vec{n} \in \mathcal{N}_0} \|\lambda^{(p+s)\vec{n}} h_{\vec{n}}\|_{(\mathcal{S}_p)}^2 = \prod_j (1 - \lambda_j^{2s})^{-1} < \infty$$

を満たす。

Definition 4. 1

$$(\mathcal{S}) \equiv \bigcap_{p \geq 0} (\mathcal{S}_p), \quad (\mathcal{S}') \equiv \bigcup_{p \geq 0} (\mathcal{S}_{-p})$$

と置くとき、3つ組 $(\mathcal{S}) \subset (L^2) \subset (\mathcal{S}')$ を white noise 解析における Gel'fand triplet と言うことにする。

Proposition 4. 2 により、空間 (\mathcal{S}) は、核型空間であり (\mathcal{S}') は (\mathcal{S}) の位相的 dual 空間であることが判る。

G, G^{-1} が、多項式の空間 $\mathcal{P}(E^*)$, $\mathcal{P}(H^*)$ の間で L^2 -ノルムを不変にしていることより、任意の $p \in \mathbf{R}$ と $f \in \mathcal{P}(H^*)$ に対して、

$$\|G^{-1}f\|_{(\mathcal{S}_p)} = \|\Gamma(D^p)G^{-1}f\|_{(L^2)} = \|\Lambda(D^p)f\|_{(\mathcal{F}_0)} = \|f\|_{(\mathcal{F}_p)}$$

である。従って、 G^{-1} は (\mathcal{S}_p) から (\mathcal{F}_p) への等距離写像 G_p^{-1} に一意的に拡張される。 $p < q$ なら G_p^{-1} は (\mathcal{F}_q) 上で G_q^{-1} に一致する。故に、 $\{G_p^{-1}; p \in \mathbf{R}\}$ は (\mathcal{F}') から (\mathcal{S}') の上への一意的な線形写像を与えている。これをもやはり G^{-1} で表す。 (\mathcal{F}') や (\mathcal{S}') に帰納的極限位相を考えれば、この拡張 G^{-1} は明らかに連続である。

内積と標準的 bilinear form について、次のことは明らかである。

$$\begin{aligned} (G^{-1}f, G^{-1}g)_{(\mathcal{S}_p)} &= (f, g)_{(\mathcal{F}_p)} \quad (f, g \in (\mathcal{F}_p)) \\ \langle G^{-1}F, G^{-1}f \rangle &= \langle F, f \rangle \quad (F \in (\mathcal{F}_{-p}), f \in (\mathcal{F}_p)) \end{aligned}$$

REMARK. $(\mathcal{S}) \subset (L^2) \subset (\mathcal{S}')$ の構成方法を、 $E_0 = L^2(\mathbf{R}; \mathbf{R})$, $D = 1 + u^2 - d^2/du^2$ の場合に適用すれば、

$$H_0 = L^2(\mathbf{R}; \mathbf{C}), \quad E_0^{\widehat{\otimes} n} = \widehat{L}^2(\mathbf{R}^n; \mathbf{R}), \quad H_0^{\widehat{\otimes} n} = \widehat{L}^2(\mathbf{R}^n; \mathbf{C})$$

$$D\zeta_j = 2(j+1)\zeta_j, \quad (D^p)^{\widehat{\otimes} n} \zeta^{\widehat{\otimes} \vec{n}} = \widehat{\otimes}_j (D^p \zeta_j)^{\widehat{\otimes} n_j} = \left(\prod_j (2(j+1))^{n_j} \right) \zeta^{\widehat{\otimes} \vec{n}}$$

$$\text{但し、} \zeta_j \equiv \zeta_j(u) \equiv (2^j j! \sqrt{\pi})^{-1/2} H_j(u) \exp[-\frac{1}{2}u^2] \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

となる。さらに、 $p > 0$ に対して

$$H_p^{\otimes n} = \left\{ f; f \in H_0, \int_{\mathbf{R}^n} |(D^p)^{\otimes n} f(u_1, \dots, u_n)|^2 du_1 \cdots du_n < \infty \right\}$$

である。これらのことより、 $I_n(f_n)$ を n 次の Multiple-Wiener 積分とすると、

$$I_n(\zeta^{\otimes \vec{n}} / \sqrt{\vec{n}!}) = h_{\vec{n}} = (2^n \vec{n}!)^{-1/2} \prod_j H_{n_j} (I_1(\zeta_j) / \sqrt{2})$$

という基本的な等式が成立する。これは、従来のホワイトノイズ汎関数の構成の仕方と上記の構成方法とが、この具体的な場合に一致していることを示している。

5 Gauss 変換の積分表示について

G, G^{-1} は先ず初めに、 $\mathcal{P}(E^*), \mathcal{P}(H^*)$ の間で積分変換

$$\mathcal{P}(E^*) \ni \varphi \mapsto G\varphi(w) \equiv \int_{E^*} \varphi(x + w/\sqrt{2}) d\mu(x) \quad (w \in H^*)$$

$$\mathcal{P}(H^*) \ni f \mapsto G^{-1}f(x) \equiv \int_{E^*} f(\sqrt{2}(x + \sqrt{-1}y)) d\mu(y) \quad (x \in E^*)$$

によって与えられていた。この表示は、もっと広い空間の間で成立する。定数 s_0, t_0, p_0 ($p_0 = s_0 \vee t_0$) を、第 1 節で定義したものとする。

LEMMA 5. 1

$p > p_0$ ならば、 $\exp[\frac{1}{2}\|x\|_{-p}^2] \in (L^2)$ で、その L^2 -ノルムは、

$$\gamma_p \equiv \int_{E_{-p}} \exp[\|x\|_{-p}^2] d\mu(x) = \prod_j (1 - 2\lambda_j^{2p})^{-1/2} \text{ であり、}$$

$p > s_0$ ならば、 $\exp[\frac{1}{2}\|x\|_{-p}^2] \in (L^1)$ で、その L^1 -ノルムは、

$$\alpha_p \equiv \int_{E_{-p}} \exp[\frac{1}{2}\|x\|_{-p}^2] d\mu(x) = \prod_j (1 - \lambda_j^{2p})^{-1/2} \text{ である。}$$

Theorem 5.1 $p > p_0$ の時、 $\varphi \in (S_p)$ に対して、 $f = G\varphi$ 、 \tilde{f} を f の H_{-p} における連続 version とする。 H_{-p} において関数 $\tilde{\varphi}(w)$ を

$$\tilde{\varphi}(w) \equiv \int_{E_{-p}} \tilde{f}(\sqrt{2}(w + \sqrt{-1}y)) d\mu(y)$$

と定義するならば、

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(w) \text{ は } H_{-p} \text{ において解析的で、かつ } \tilde{\varphi}(x) &= \varphi(x) \quad (\mu - \text{a.e. } x \in E^*), \\ |\tilde{\varphi}(x+w)| &\leq \gamma_p \|\varphi\|_{(S_p)} \exp[\|x\|_{-p}^2] \exp[\|w\|_{-p}^2] \quad (x \in E_p^*, w \in H_p^*) \end{aligned}$$

である。さらに、 p の条件を弱くして $p > s_0$ とすると、

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(x) \text{ は、 } E_{-p} \text{ において連続で、 } \tilde{\varphi}(x) &= \varphi(x) \quad (\mu - \text{a.e. } x \in E^*), \\ |\tilde{\varphi}(x)| &\leq \alpha_p \|\varphi\|_{(S_p)} \exp\left[\frac{1}{2}\|x\|_{-p}^2\right] \quad (x \in E_{-p}) \end{aligned}$$

となる。

この定理の証明は、上の2つの補題及び命題 3.2 における評価式と Lebesgue の収束定理を使ってなされる。

DEFINITION 5.1 $p > p_0$ の時、定理 5.1 における $\tilde{\varphi}(w)$ ($w \in H_{-p}$) を $\tilde{\varphi}(x)$ ($x \in E_{-p}$) の、あるいは単に φ の analytic continuation と呼ぶ。

Theorem 5.2 $p > p_0$ 、 $\varphi \in (S_p)$ に対して $f = G\varphi$ と置く。この時、 φ の analytic continuation について

$$\tilde{f}(w) = \int_{E_{-p}} \tilde{\varphi}(x + w/\sqrt{2}) d\mu(x), \quad w \in (H_{-p})$$

が成り立つ。

定理の証明は、定理 5.1 における評価式と Lebesgue の収束定理を使ってなされる。

References

- [Ba] V. Bargmann, On a Hilbert space of analytic functions and associated integral transform Part 1, *Comm. Pure Appl. Math.*, Vol. 14 (1961), 187-214.
- [B-K] Yu. M. Berezansky & Yu. Ge. Kondrat'ev, Spectral methods in infinite-dimensional analysis, *Naukova Dumka, Kiev* (1988).
- [G-S] I. M. Gel'fand & G. E. Shilov, "Generalized functions", *Academic Press*, Vol. 4, New York/London, 1964.

- [G-V] I. M. Gel'fand & N. Ya. Vilenkin, "Generalized functions", *Academic Press*, Vol. **2**, New York/London, 1964.
- [H] T. Hida, Analysis of generalized Brownian functionals, *Carleton-Ottawa Math. Lecture Note Ser.*, Vol. **13**, 2nd. Ed., 1975.
- [H-P] E. Hille & R. H. Phillips, "Functional analysis and semi-groups", *American Mathematical Society*, 1957.
- [Ko] Yu. Ge. Kondrat'ev, Spaces of entire functions of an infinite number of variables, connected with the rigging of a Fock space, *Selecta Math. Soviet.*, Vol. **10** (1991), No. 2, 165-180.
- [K-T] I. Kubo & S. Takenaka, Calculus on Gaussian white noise I, *Proc. Japan Acad. Ser. A, Math, Sci.*, Vol. **56** (1980), 376-380.
- [K-T] I. Kubo & S. Takenaka, Calculus on Gaussian white noise II, *Proc. Japan Acad. Ser. A, Math, Sci.*, Vol. **56** (1980), 411-416.
- [K-T] I. Kubo & S. Takenaka, Calculus on Gaussian white noise III, *Proc. Japan Acad. Ser. A, Math, Sci.*, Vol. **57** (1981), 433-437.
- [K-T] I. Kubo & S. Takenaka, Calculus on Gaussian white noise IV, *Proc. Japan Acad. Ser. A, Math, Sci.*, Vol. **58** (1982), 186-189.
- [K-Y] I. Kubo & Y. Yokoi, A remark on the testing random variables in white noise calculus, *Nagoya Math. J.*, Vol. **115** (1989), 139-149.
- [L] Yu. J. Lee, Analytic versions of test functionals, Fourier transform and a characterization of measures in white noise calculus, *J. Funct. Anal.*, Vol. **100** (1991), 359-380.
- [M] R. A. Minlos, Generalized random processes and their extension to a measure, *Selected Transl. in Math. Stat. & Prob.*, Vol. **3** (1962), 291-313.
- [P-S] J. Potthoff & L. Streit, A characterization of Hida distributions, *BiBos Preprint*, No. **406** (1989).
- [R-R] A. P. Robertson & W. Robertson, "Topological vector spaces", *Cambridge Tracts in Math. & Math. Phys.*, No. **53** (1964).
- [S] I. E. Segal, Tensor algebra over Hilbert spaces, *Trans Amer. Math. Soc.*, Vol. **81** (1956), 106-134.

[山] 山崎 泰郎, "無限次元空間の測度 (上)", 紀ノ国屋数学叢書 13-A, 紀ノ国屋書店 (1978).

[Yo] Y. Yokoi, Positive generalized white noise functionals, *Hiroshima Math. J.*, Vol. **20** (1990), 137-157.